

О взаимосвязи циркуляции напряженности электрического поля и электродвижущей силы индукции во временной области

Губатенко В.П., Пескова О.С., СГТУ, г. Саратов

Основу методов электроразведки составляют решения краевых задач уравнений Максвелла, с помощью которых проводится интерпретация полевых наблюдений. Поэтому предъявляются повышенные требования к разработке прецизионной аппаратуры для измерения электромагнитного поля. В методах становления поля для измерения циркуляции напряженности электрического поля применяют многожильный кабель, разложенный на поверхности земли. Каждый виток этой петли представляет собой медный провод, в котором наводится электродвижущая сила (ЭДС) индукции. При этом ЭДС индукции отождествляется с циркуляцией напряженности электрического поля по контуру петли, что с большой точностью справедливо на достаточно низких частотах (поздних стадиях становления поля), но благодаря скин-эффекту, неверно на высоких частотах (ранних временах неустойчивого процесса). Учет систематической ошибки, связанной с внедрением в среду антенны (измерительной линии), изменяющей электропроводность исходной среды, является, как известно, чрезвычайно сложной задачей. Однако, как показано в работе [1, 2], при некоторых упрощающих условиях эта задача может быть решена.

Пусть в некоторой немагнитной среде (магнитная проницаемость μ равна $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м) с областью V , заполненной однородной средой с параметрами σ_0 , ϵ_0 , где σ_0 и ϵ_0 - электропроводность и диэлектрическая проницаемость, возбуждается с круговой частотой ω осесимметричное электромагнитное поле. Для измерения единственной отличной от нуля азимутальной компоненты E_ϕ^0 напряженности электрического поля внесем в область V проводящую круговую петлю, а точнее провод с электропроводностью σ , изготовленный в форме тора, образованного вращением круга радиуса a вокруг оси, лежащей в кругом плоскости, и центром, удаленным от оси вращения на расстоянии R . Таким образом, величина a характеризует толщину провода, а R - радиус круговой петли. Совместим ось вращения тора с осью симметрии исходного электромагнитного поля. Появление в области V круговой петли оставляет электромагнитное поле осесимметричным, но изменяет исходное распределение параметров среды, в результате чего в среде возбуждается азимутальная компонента E_ϕ^0 напряженности электрического поля, отличная от E_ϕ^0 .

Внесенная в однородную среду круговая петля вместе с подключенным к ней измерительным прибором играет роль измерительного контура. Можно, например, для измерения ЭДС индукции подключить вольтметр к петле последовательно. Такой способ основан на втором законе Кирхгофа, в соответствии с которым ЭДС индукции равна произведению силы наведенного тока, протекающего через вольтметр, на

внутреннее сопротивление вольтметра. Но сопротивление вольтметра значительно превышает сопротивление нагрузки (сопротивление петли). Поэтому для теоретического исследования ЭДС индукции при последовательном подключении вольтметра надо рассмотреть более сложную модель круговой петли - петлю с высокоомной вставкой. Для выбранной нами модели петли ЭДС индукции можно измерить опосредованно либо с помощью последовательного соединения петли с гальванометром, либо применяя параллельное подключение вольтметра к круговой петле. Гальванометр имеет низкое внутреннее сопротивление и поэтому его последовательное подключение к петле практически не изменяет силу наведенного в петле тока в отсутствие подключения. По измеренной гальванометром силе тока, равной $J^{ind} = \pi a^2 \sigma \bar{E}_\phi$, где $\bar{E}_\phi$ - среднее значение напряженности E_ϕ электрического поля по поперечному сечению провода, находится ЭДС индукции по формуле:

$$\mathcal{E}^{ind} = 2\pi R \bar{E}_\phi = \frac{2R}{a^2 \sigma} J^{ind}.$$

В случае параллельного подключения вольтметра к участку круговой петли длины Δl сила тока J^{ind} (средняя напряженность электрического поля $\bar{E}_\phi$), протекающего в проводе, почти не изменяется из-за большого внутреннего сопротивления вольтметра. Напряжение $\mathcal{E}_l$ определяется из соотношения $\mathcal{E}_l = \Delta l J^{ind} R^v$, где $\Delta l J^{ind}$ и R^v - соответственно сила тока, ответвляющегося на вольтметр, и внутреннее сопротивление вольтметра. Отсюда получаем, что

$$\mathcal{E}^{ind} = 2\pi R \mathcal{E}_l / \Delta l = 2\pi R R^v \frac{\Delta J^{ind}}{\Delta l}.$$

Из полученных соотношений следует, что для сравнения циркуляции напряженности электрического поля и ЭДС индукции надо найти взаимосвязь средних напряженностей $\bar{E}_\phi^0$ и $\bar{E}_\phi$ электрического поля, где $\bar{E}_\phi^0$ - среднее значение напряженности E_ϕ^0 электрического поля, вычисляемое по той же области, по которой определяется $\bar{E}_\phi$.

Предположим, что $a/R \ll 1$, $|k_0 a| \ll 1$, $|k_0/a| \ll 1$, где $k_0 = \sqrt{i\omega\mu_0(\sigma_0 - i\omega\epsilon_0)}$, $k = \sqrt{i\omega\mu_0\sigma}$ - волновые числа среды в области V и провода соответственно. Эти условия означают, что толщина провода значительно меньше радиуса круговой петли, а среда в области V высокоомная, и ее электропроводность много меньше электропроводности провода. Поскольку в полевой электроразведке проводят наземные измерения и применяют медные провода, обладающие высокой электропроводностью, то сделанные нами предположения выполняются вплоть до очень высоких частот ω . Применяя метод интегральных уравнений с учетом сделанных допущений, в работе [1, 2] показано, что комплексные амплитуды средних напряженностей $\bar{E}_\phi^0$ и $\bar{E}_\phi$ электрического поля связаны соотношением:

ТЕОРИЯ
ЭЛЕКТРОРАЗВЕДКА СЕГОДНЯ И ЗАВТРА



$$\tilde{E}_\phi^0(\omega) = \left(1 + \frac{k^2 a^2}{2} \ln \frac{8R}{e^2 a}\right) \tilde{E}_\phi^{\text{ind}}(\omega), \quad (1)$$

где e - основание натурального логарифма. Учитывая малую толщину провода и условие $a/R \ll 1$, можно считать, что компонента E_ϕ^0 в области поперечного сечения тора однородна и, следовательно, мало отличается от своего среднего значения $\tilde{E}_\phi^0$ по этой области. Умножая обе части на $2\pi R$, получаем соотношение между циркуляцией напряженности электрического поля $\mathcal{E}^0(\omega)$ и ЭДС индукцией $\mathcal{E}^{\text{ind}}(\omega)$ в частотной области:

$$E^0(\omega) = \left(1 + \frac{k^2 a^2}{2} \ln \frac{8R}{e^2 a}\right) E^{\text{ind}}(\omega), \quad (2)$$

Равенства в формулах (1) и (2) следует рассматривать как приближенные, которые, тем не менее, обеспечивают необходимую точность в широкой полосе частот (вплоть до 1 ГГц). Заметим, что в данном приближении коэффициент пропорциональности между $\mathcal{E}^0(\omega)$ и $\mathcal{E}^{\text{ind}}(\omega)$ не зависит от волнового числа k_ϕ .

Круговая петля характеризуется двумя размерами: радиусом a поперечного сечения провода и радиусом R . Поэтому, если длина волны электромагнитного поля, убывающая с ростом ω , будет мала по сравнению с a или R , то нарушается однородное распределение электрического поля по сечению провода, что может привести к заметному отличию $\mathcal{E}^{\text{ind}}(\omega)$ от $\mathcal{E}^0(\omega)$. Соотношение (2) подтверждает возрастание отличия между $\mathcal{E}^{\text{ind}}(\omega)$ и $\mathcal{E}^0(\omega)$ при увеличении частоты ω и радиуса R круговой петли при фиксированном радиусе a .

Выполним в выражении (2) замену $-i\omega \rightarrow p$, где p - параметр преобразования Лапласа. Тогда для изображений $\mathcal{E}^0(p)$ и $\mathcal{E}^{\text{ind}}(p)$ по Лапласу соответствующих функций $\mathcal{E}^0(t)$ и $\mathcal{E}^{\text{ind}}(t)$ времени можно записать:

$$E^0(p) = \left(1 + p \frac{\mu_0 \sigma a^2}{2} \ln \frac{8R}{e^2 a}\right) E^{\text{ind}}(p). \quad (3)$$

Применяя теорему о дифференцировании оригинала и учитывая, что при включении в момент времени $t=0$ сторонних токов, возбуждающих осесимметричное поле, справедливы начальные условия $E^0(t)|_{t=0}=0$, $E^{\text{ind}}(t)|_{t=0}=0$, находим связь циркуляции напряженности электрического поля и ЭДС индукции во временной области:

$$\mathcal{E}^0(t) = \mathcal{E}^{\text{ind}}(t) + \frac{\mu_0 \sigma a^2}{2} \ln \frac{8R}{e^2 a} \frac{d}{dt} \mathcal{E}^{\text{ind}}(t). \quad (4)$$

Таким образом, для нахождения циркуляции напряженности электрического поля $\mathcal{E}^0(t)$ по известной ЭДС индукции $\mathcal{E}^{\text{ind}}(t)$ достаточно применить к последней оператор дифференцирования

$$1 + \frac{\mu_0 \sigma a^2}{2} \ln \frac{8R}{e^2 a} \frac{d}{dt}.$$

Из формулы (4) следует, что если циркуляция напряженности электрического поля $\mathcal{E}^0(t)$ претерпевает разрывы первого рода, что нередко встречается в решениях краевых задач уравнений Максвелла, то ЭДС индукции является непрерывной функцией времени.

Несколько сложнее решается обратная задача - восстановление ЭДС индукции по заданной циркуляции напряженности электрического поля. Для решения этой задачи

запишем соотношение (3) в виде:

$$\mathcal{E}^{\text{ind}}(p) = \left(1 + p \frac{\mu_0 \sigma a^2}{2} \ln \frac{8R}{e^2 a}\right)^{-1} \mathcal{E}^0(p).$$

Отсюда и по теореме о свертке получаем:

$$E^{\text{ind}}(t) = \int_0^t K(t-\tau) E^0(\tau) d\tau, \quad (5)$$

$$\text{где } K(t) = \frac{1}{\beta} e^{-\beta t} U(t); \quad \beta = \frac{\mu_0 \sigma a^2}{2} \ln \frac{8R}{e^2 a};$$

$U(t)$ - функция Хевисайда.

Приведем примеры, иллюстрирующие взаимосвязь циркуляции напряженности электрического поля и ЭДС индукции. Пусть в круговой цилиндрической системе координат p, ϕ, z , задано однородное пространство с параметрами $\sigma_\phi, \mu_\phi, \epsilon_\phi$. Предположим, что на оси OZ в плоскости $z=H$ находится магнитный диполь, момент которого направлен по оси OZ и скачком изменяется при $t=0$ от некоторого постоянного значения M до нуля. В силу осевой симметрии магнитный диполь возбуждает в однородном пространстве осесимметричное E - поле специального вида, т.е. электромагнитное поле, имеющее только 3 отличные от нуля и независимые от координаты ϕ компоненты: компоненту E_ϕ^0 напряженности электрического поля и компоненты H_p^0 и H_z^0 напряженности магнитного поля. В работе [3] показано, что азимутальная компонента E_ϕ^0 имеет вид:

$$E_\phi^0(T, p, x) = \gamma p e^{-T} \frac{I_2(x)}{x^2} U(T-F), \quad (6)$$

где $I_2(x)$ - модифицированная функция Бесселя первого рода второго порядка действительного

аргумента x ; $T = \frac{\sigma_0 t}{2\epsilon_0}$; $x = \sqrt{T^2 - F^2}$;

$$F = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \frac{\sigma_0}{2} \sqrt{\rho^2 + (z-H)^2}; \quad \gamma = \left(\frac{\mu_0}{\epsilon_0}\right)^{5/2} \frac{M \sigma_0^4}{64\pi}.$$

Рассмотрим циркуляцию напряженности электрического поля $\mathcal{E}^0(t)$ по окружности радиуса R с центром на оси OZ , лежащей в плоскости $z=H$. В соответствии с формулой (6):

$$\mathcal{E}^0(t) = 2\pi R E_\phi^0 = \frac{M \mu_0^{5/2} \sigma_0^2 R^2}{8\sqrt{\epsilon_0}} U(t-t_0) e^{-\frac{\sigma_0 t}{2\epsilon_0}} \cdot \frac{I_2\left(\frac{\sigma_0}{2\epsilon_0} \sqrt{t^2 - t_0^2}\right)}{t^2 - t_0^2}, \quad (7)$$

где $t_0 = \sqrt{\mu_0 \epsilon_0} R$ - момент времени прихода электромагнитной волны из точки источника поля на окружность, по которой вычисляется $\mathcal{E}^0(t)$. Внесем теперь в пространство для измерения циркуляции напряженности электрического поля круговую петлю. ЭДС индукции в этой петле в соответствии с формулами (5) и (7) равна:

$$\mathcal{E}^{\text{ind}}(t) = \frac{M \mu_0^{5/2} \sigma_0^2 R^2}{8\beta \sqrt{\epsilon_0}} U(t-t_0) \int_{t_0}^t e^{-\frac{t-\tau}{\beta}} e^{-\frac{\sigma_0 \tau}{2\epsilon_0}} \cdot \frac{I_2\left(\frac{\sigma_0}{2\epsilon_0} \sqrt{\tau^2 - t_0^2}\right)}{\tau^2 - t_0^2} d\tau. \quad (8)$$

Большой практический интерес представляет другая модель среды, отличающаяся от предыдущей тем, что в области $z < 0$ расположен

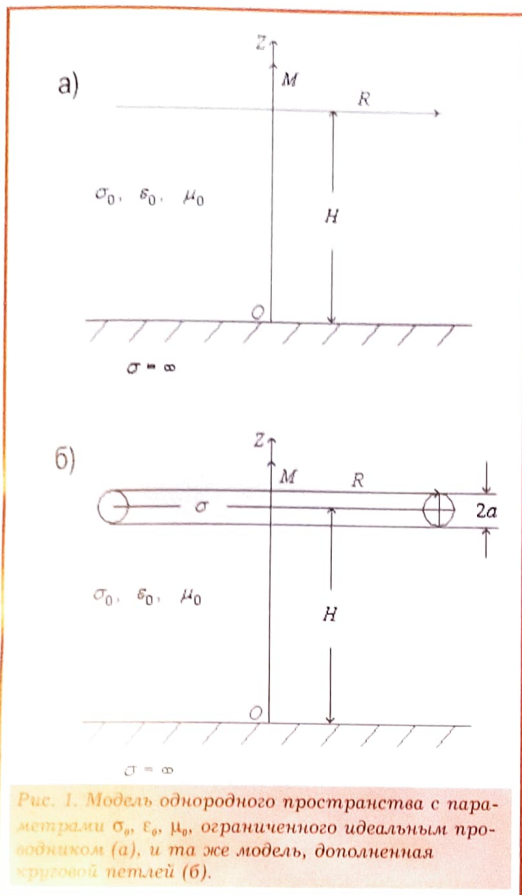


Рис. 1. Модель однородного пространства с параметрами $\sigma_0, \epsilon_0, \mu_0$, ограниченного идеальным проводником (а), и та же модель, дополненная круговой петлей (б).

идеальный проводник (рис. 1а). Решение задачи о установившемся поле, возникающем при мгновенном выключении момента M магнитного диполя, получено в работе [3] методом зеркальных отображений. В соответствии с этим методом асимптотическая компонента напряженности электрического поля $E_{\varphi 1}^0(t)$ в области $z < 0$ равна:

$$E_{\varphi 1}^0(t) = E_{\varphi}^0(T, p, x_+) - E_{\varphi}^0(T, p, x_-), \quad (9)$$

где функция $E_{\varphi}^0(T, p, x)$ определяется выражением

$$(5), \quad x_{\pm} = \sqrt{T^2 - F_{\pm}^2}; \quad F_{\pm} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0} \frac{\sigma_0}{2} \sqrt{\rho^2 + (z \mp H)^2}}.$$

Также как и в предыдущем случае рассмотрим циркуляцию напряженности электрического поля $\mathcal{E}_1^0(t)$ по окружности радиуса R с центром на оси OZ , лежащей в плоскости $z=H$ (рис. 1б). Выражение для $\mathcal{E}_1^0(t)$ имеет вид:

$$\mathcal{E}_1^0(t) = \frac{M \mu_0^{5/2} \sigma_0^2 R^2}{8 \sqrt{\epsilon_0}} e^{\frac{\sigma_0 t}{2 \epsilon_0}} \left[U(t - t_0) \frac{I_2 \left(\frac{\sigma_0}{2 \epsilon_0} \sqrt{t^2 - t_0^2} \right)}{t^2 - t_0^2} - U(t - t_1) \frac{I_2 \left(\frac{\sigma_0}{2 \epsilon_0} \sqrt{t^2 - t_1^2} \right)}{t^2 - t_1^2} \right], \quad (10)$$

где $t_1 = \sqrt{\mu_0 \epsilon_0 (\rho^2 + 4H^2)}$ - время прихода отраженной от идеального проводника волны на окружность, по которой вычисляется $\mathcal{E}_1^0(t)$. Помещая теперь на этой окружности круговую петлю и применяя формулы (5) и (10), находим ЭДС индукции $\mathcal{E}_1^{ind}(t)$ в петле:

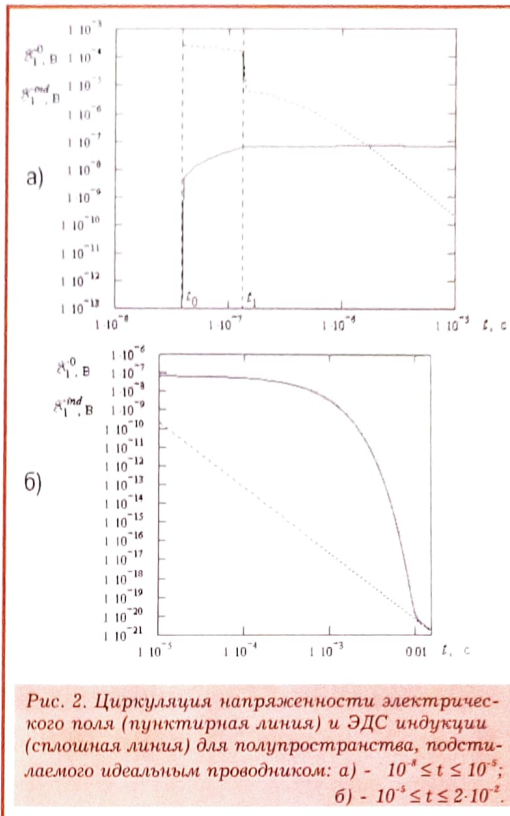


Рис. 2. Циркуляция напряженности электрического поля (пунктирная линия) и ЭДС индукции (сплошная линия) для полупространства, подстилаемого идеальным проводником: а) - $10^{-4} \leq t \leq 10^{-3}$; б) - $10^{-5} \leq t \leq 2 \cdot 10^{-2}$.

$$\mathcal{E}_1^{ind}(t) = \frac{M \mu_0^{5/2} \sigma_0^2 R^2}{8 \beta \sqrt{\epsilon_0}} \left[U(t - t_0) \int_{t_0}^t e^{\frac{t-\tau}{\beta}} e^{\frac{\sigma_0 \tau}{2 \epsilon_0}} \frac{I_2 \left(\frac{\sigma_0}{2 \epsilon_0} \sqrt{\tau^2 - t_0^2} \right)}{\tau^2 - t_0^2} d\tau - U(t - t_1) \int_{t_1}^t e^{\frac{t-\tau}{\beta}} e^{\frac{\sigma_0 \tau}{2 \epsilon_0}} \frac{I_2 \left(\frac{\sigma_0}{2 \epsilon_0} \sqrt{\tau^2 - t_1^2} \right)}{\tau^2 - t_1^2} d\tau \right], \quad (11)$$

Несмотря на довольно простой вид формул (8) и (11), численное интегрирование выражений в правых частях этих формул является непростой задачей. Поэтому для нахождения $\mathcal{E}_1^{ind}(t)$ по известной функции $\mathcal{E}_1^0(t)$ поставим следующую задачу Коши: найти численное решение $\mathcal{E}_1^{ind}(t)$ дифференциального уравнения (4), удовлетворяющее начальному условию $\mathcal{E}_1^{ind}(t)|_{t=0} = 0$. На рис. 2 представлены в билогарифмическом масштабе результаты решения этой задачи для полупространства, подстилаемого идеальным проводником, в случае:

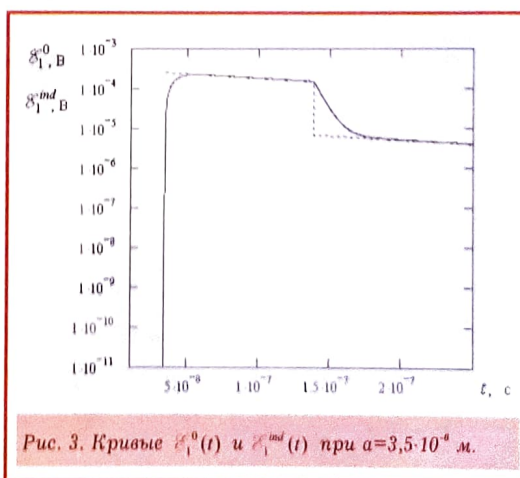


Рис. 3. Кривые $\mathcal{E}_1^0(t)$ и $\mathcal{E}_1^{ind}(t)$ при $a = 3,5 \cdot 10^{-4}$ м.

$$\sigma_0 = 10^{-4} \text{ См/м}, \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Гн/м}, \epsilon_0 = \frac{1}{36\pi} 10^{-9} \text{ Ф/м}$$

(ϵ_0 - диэлектрическая проницаемость вакуума), медного провода ($\sigma = 5,61 \cdot 10^7 \text{ См/м}$), $M = 1 \text{ Ам}^2$, $H = 20 \text{ м}$, $R = 10 \text{ м}$, $a = 0,001 \text{ м}$, для ранних и поздних стадий становления поля. На рис. 2а показано, что циркуляция напряженности электрического поля претерпевает два скачка - в момент времени $t_0 = 3,33 \cdot 10^{-5} \text{ с}$ прихода падающей волны и при $t_1 = 3,37 \cdot 10^{-7} \text{ с}$ в момент времени прихода в пункт наблюдения отраженной от идеального проводника волны. В отличие от циркуляции напряженности электрического поля ЭДС индукции является непрерывной функцией времени и, хотя и быстро, но непрерывно возрастает от нуля (в момент времени t_0) до некоторого мало изменяющегося в широком диапазоне времени, значения. С некоторого момента времени ЭДС индукции начинает быстро убывать, а на поздних временах ($t > 10^{-2} \text{ с}$) она практически не отличается от циркуляции напряженности электрического поля. Если при тех же параметрах геоэлектрической модели

уменьшать толщину круговой петли (рис. 3), то кривые $\mathcal{E}_i(t)$ и $\mathcal{E}_i^{ind}(t)$ сближаются, а при $a < 3,5 \cdot 10^{-6} \text{ м}$ отличия кривых не существенны.

Полученные в данной работе результаты показывают, что различие между циркуляцией напряженности электрического поля и ЭДС индукции может быть существенным на ранних и промежуточных стадиях становления и им можно пренебречь на самых поздних стадиях неустановившегося процесса.

Литература

1. Пескова О.С., Губатенко В.П. Применение интегральных уравнений для математического моделирования измерения электрического поля // Современные методы теории краевых задач: Материалы чтения - XV, 3-9 мая 2004 г. - Воронеж, 2004. - С. 165-166.
2. Пескова О.С., Губатенко В.П. Математическое моделирование измерения плоского и осесимметрического электрического поля // Математическое моделирование и краевые задачи: Труды всероссийской научной конференции, 26 - 28 мая 2004 г. - Самара, 2004. - С. 210-212. Часть 2.
3. Губатенко В.П., Осипов В.Г., Назаров А.А. Квазиволновые свойства сигнала становления электромагнитного поля // Известия РАН. Физика Земли, N3, 2000. С. 40-49.

Зондирование становлением поля с фокусировкой электрического тока

Рыхлинский Н.И., НП «Институт инновационных методов геофизики», г. Москва

Важная информация о геологическом объекте может быть получена путем электромагнитного зондирования становлением поля с использованием контролируемых искусственных источников поля с фокусировкой электрического тока в месте приема сигнала (ЗС-ФТ).

Возбуждаемое электромагнитное поле в земных породах реагирует не только на пространственное распределение электропроводности, но и, что особенно важно для нефтегазового поиска, на распределение вызванной поляризации (ВП). Чтобы получить информацию о наличии залежи углеводородов в изучаемом объекте и оконтурить ее, необходимо максимально ослабить искажающее влияние на результаты измерений всех боковых, относительно точки зондирования геологических объектов, в которые проникает электрическое поле источника тока. Для этого при зондировании нужно осуществить фокусировку тока в месте приема сигнала и при решении обратной задачи исключить плечевой эффект.

Понятие «исключение плечевого эффекта» появилось с изобретением в начале пятидесятых годов прошлого века методов электрического зондирования с фокусировкой тока и с решением для них обратной задачи. Методами с фокусировкой тока неоднородность (например, пройденный скважиной тонкий пласт) отображается в виде равнобедренной трапеции. Угол наклона ее боковой стороны не зависит от размера зондирующей установки, а зависит от длины фокусирующих элементов, которая по техническим причинам не может быть равна нулю. Амплитуда аномалии, измеренная установкой с фокусировкой тока, имеет одинаковое значение при профилировании над всей толщей неоднородности. Это значение не зависит от так называемого в каротаже влияния вмещающих пород (в электроразведке - бокового влияния), что согласуется с известным в физике принципом наименьшего действия.

В разработанной новой технологии электричес-

ких зондирований проблема исключения плечевого эффекта решается. В основу технологии положен ряд вариантов метода становления поля с использованием контролируемых искусственных источников электромагнитного поля с фокусировкой электрического тока в месте приема сигнала.

Метод предназначен для поисков и оконтуривания нефтегазовых залежей на основе определения свойственных каждому из элементов (горизонтов) толщи осадочных отложений горных пород следующих трех, необходимых для решения поставленной задачи, электрофизических параметров: удельной электропроводности σ , вызванной поляризации η и постоянной времени τ спада разности потенциалов ВП. Благодаря фокусировке тока, метод обладает высокой расчленяющей способностью по латерали, что необходимо для определения местоположения границ контура залежи.

В традиционной электроразведке с контролируемым искусственным источником тока получают лишь суммарные сведения о совокупности всех элементов строения исследуемой среды, в которые проникает ток, так как его распределение в пространстве не определяют.

Поэтому традиционная электроразведка, в том числе и ЗСБ, высоко успешна для инженерных изысканий, где используют малоразмерные установки, и вполне успешна для поисков контрастных по электрическому сопротивлению объектов относительно вмещающих пород, например, высокопроводящих рудных тел, или для решения таких интегральных задач, как определение местоположения фундамента, определение границ вечной мерзлоты и пр. Но она редко успешна для поисков и оконтуривания нефтегазовых залежей из-за их недостаточной контрастности по электрическим параметрам относительно вмещающих пород и плохого расчленения разреза по латерали.

Получаемый предложенным методом технический результат, который сводится к решению задачи