



Наглядные спектральные оценки сейсмических сигналов и аппаратурных шумов

Юшин В.И., СО РАН, г. Новосибирск

Отображение сейсмических колебаний в частотной области служит важным инструментом анализа как целевых волн, так и микросейсмического шума. Однако традиционные оценки в виде спектральной плотности мощности (СПМ) или амплитудных спектров страдают тем существенным недостатком, что по ним трудно проводить абсолютные количественные сопоставления сигналов разных типов или сравнивать параметры сигналов во временной и частотной области. Причина не только в том, что временные и спектральные представления имеют разные физические размерности. Даже оценки одной природы, как, например, СПМ и просто амплитудный спектр, точнее, спектральная плотность амплитуд количественно на одном графике и в одном масштабе не сопоставимы. В конечном итоге, это сужает практическое применение спектров, зачастую ограничивая их арсенал нормированными оценками. Сейсмологи давно пытаются усовершенствовать спектральные представления с тем, чтобы добиться большей совместимости последних с легко воспринимаемыми амплитудными параметрами сигналов во временной области. Известны предложения Дж. Стейма, который ввел понятие *октавного спектра*, и Дж. Петерсона, усложнив его введением понятия *среднемаксимальной амплитуды*, пригодного как для шума, так и для сигналов типа землетрясений. Так, октавный спектр по Стейму представляет собой среднеквадратическое значение сигнала в некоторой относительной ("октавной") полосе частот в области заданной текущей частоты. Его размерность совпадает с размерностью исходного сигнала, а аргументом является, среднегеометрическая либо одна из граничных частот. Выбор относительной полосы именно в одну октаву не принципиален. В литературе и сейсмологических сайтах интернета можно встретить "октавные" спектры, определенные в полосах 1/3 октавы, 1/10 декады и др. Несмотря на значительные удобства, октавные спектры все же не решают всего многообразия задач по анализу сигналов.

В настоящей статье сделана попытка анализа некоторых спектральных оценок, которые позволяют более целенаправленно, исходя из поставленной задачи, анализировать сейсмические колебания любой природы, а также могут использоваться для тестирования аппаратного тракта по собственным шумам. Обращение к этой проблеме вызвано тем, что с внедрением цифровых станций с большим динамическим диапазоном и мощных персональных компьютеров алгоритмы спектральных преобразований стали легко доступными специалистам-практикам. Однако пользуются ими не всегда корректно. О чем, например, может поведать инженеру в абсолютных единицах такая широко распространенная спектральная оценка как корень квадратный из СПМ с пугающей размерностью вольт на корень из Гц?

Все рассматриваемые ниже оценки представляют собой лишь функциональные преобразования от традиционных спектральных оценок, таких как *амплитудный спектр*, *периодограмма*, *спектральная плотность мощности* [1,2] и ни в коей мере не затрагивают классические основы спектрального анализа. Более того, некоторые из них встречаются и в классической теории, но, к сожалению, еще не получили достойного применения на практике.

Спектр, периодограмма и спектральная плотность мощности.

Пусть функции времени $x(t)$ представляет собой цифровую запись некоторого физического процесса, то есть, безразмерное число. Чтобы оттенить этот факт, будем обозначать такую "безразмерную размерность" единицей код (в зависимости от конкретной задачи ее затем можно заменить на любую физическую величину как вольт, метр в секунду и т.п.).

Понятие и определение комплексного спектра Фурье может относиться к любому физически возможному сигналу $x_T(t)$ ограниченной продолжительности T или к произвольно выбранному отрезку $[0, T]$ не ограниченного во времени сигнала $x(t)$:

$$X_T(f) = \int_0^T x_T(t) e^{-j2\pi ft} dt = \int_0^T x(t) e^{-j2\pi ft} dt \quad (1)$$

Комплексный спектр Фурье (1) определен на всей частотной оси и имеет размерность код·с или код/Гц. Обозначим его модуль как

$$A_T(f) = |X_T(f)| = \sqrt{X_T(f) X_T^*(f)} \quad (2)$$

где $X_T^*(f)$ - комплексно сопряженный спектр. Функцию $A_T(f)$ обычно называют *амплитудным спектром*, а точнее, спектральной плотностью амплитуд. Здесь индекс T напоминает о ее зависимости от интервала времени, на котором выполнялось преобразование. Функция от комплексного спектра (1), определенная только на положительных частотах, вида

$$S_T(f) = \frac{2|X_T(f)|^2}{T} = \frac{2A_T^2(f)}{T}, \quad f \geq 0 \quad (3)$$

называется в теории случайных функций [1,2] *периодограммой*, а точнее, *односторонней периодограммой*. Если $x(t)$ - эргодический стационарный случайный процесс, то для него через понятие периодограммы, а значит, через амплитудный спектр может быть определена основная статистическая характеристика - спектральная плотность мощности (СПМ):

$$S(f) = M \left[\lim_{T \rightarrow \infty} S_T(f) \right] = M \left[\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{2A_T^2(f)}{T} \right], \quad f \geq 0, \quad (4)$$

где M - символ операции математического ожидания - усреднения по ансамблю реализаций. Как видим, для получения СПМ через



амплитудный спектр необходимы два предельных перехода - по времени и по множеству. При этом, как доказал В.С. Пугачев [3], операция M не может быть заменена предельным переходом при $T \rightarrow \infty$ (удлинением интервала Фурье-преобразования). Это связано с тем обстоятельством, что оценка периодограммы по одной, даже сколь угодно длинной, реализации $x(t)$ статистически несостоятельна (ее дисперсия не убывает с увеличением T). В результате, ее график выглядит как очень сильно и беспорядочно осциллирующая в неотрицательной области функция, причем с ростом интервала T размах осцилляций не убывает, а становится лишь более "высокочастотным". Такую функцию можно сгладить, применив простое усреднение в скользящем окне вдоль частотной оси, и это часто используется на практике. В.С. Пугачев показал [3], что для случайного процесса это как раз и эквивалентно тому, что исходная "длинная" реализация разбивается на ряд более коротких отрезков, после чего оценка спектральной плотности все равно находится по множеству периодограмм этих отрезков в соответствии с выражением (4).

В целом, корректная оценка СПМ эргодического стационарного случайного процесса может быть получена тремя статистически равноценными способами. Первый способ, как упомянуто, состоит в разбиении длинной реализации $x(t)$ на множество K относительно коротких (длиной T каждый) отрезков, вычислении по каждому из них периодограммы (3) и последующим их усреднением по полученному множеству K :

$$\hat{S}_T(f) = \frac{2}{K} \sum_{k=1}^K \frac{A_{T,k}^2(f)}{T} \quad (5)$$

Второй способ состоит в однократном вычислении периодограммы (3) и последующим сглаживанием ее вдоль оси частот. Третий способ следует из альтернативного определения СПМ как преобразования Фурье автокорреляционной функции (здесь мы на нем не будем останавливаться).

На практике, однако, вместо СПМ чаще всего используют недостаточно усредненную или даже одиночную периодограмму (3) со всеми ее недостатками. Помимо сильной изрезанности, которая мешает, например, поместить на один график несколько сравниваемых спектров, периодограмма (и СПМ) имеет еще два существенных, с точки зрения визуального анализа, недостатка. Если в анализируемом сигнале присутствуют гармонические компоненты, то они проявляются в виде узких спектральных линий большой амплитуды, совершенно неадекватной их сравнительному с шумовой компонентой уровню в исходном сигнале. Их амплитуда пропорциональна интервалу T , тогда как уровень сплошной части СПМ не зависит от T .

Другой недостаток состоит в следующем. СПМ (и периодограмма) имеет размерность $\text{код}^2 \cdot \text{с}$, или $\text{код}^2/\text{Гц}$, и физически может интерпретироваться как средняя мощность (или дисперсия) исходного сигнала в фиксированной абсолютной полосе частот шириной 1 Гц в окрестности данной частоты. Однако на графике функции времени (например, сейсмограмме) человек способен

визуально охватить лишь ограниченную *относительную* полосу частот независимо от того, к какой области абсолютных частот относится эта запись. В результате, восприятие спектральной плотности оказывается в целом искажено относительно субъективного восприятия исходного сигнала неадекватным подчеркиванием низкочастотных составляющих.

Для визуального анализа частотного состава сейсмограммы *во времени* мы обычно применяем фильтры, вырезающие частотные компоненты, несущие наиболее ценную, по нашему мнению, информацию. Чтобы сопоставить наблюдаемые амплитуды и мощность такого отфильтрованного сигнала с его СПМ, заданной в широкой полосе частот, необходимо выполнить интегрирование последней в соответствующей узкой полосе. Но если эту операцию приходится (явно или мысленно) выполнять почти всегда, то возникает вопрос, не проще ли заранее преобразовать спектральную плотность таким образом, чтобы результат был бы сразу сопоставим с привычными амплитудными оценками сигнала? Непосредственно же к СПМ целесообразно обращаться лишь тогда, когда это действительно необходимо, например, для вычисления корреляционных функций, расчета оптимальных операторов и т.п.

Октавные спектры.

Рассмотрим скользящее интегральное преобразование односторонней спектральной плотности в области положительных частот вида

$$Q_a(f) = \int_f^{af} S(f') df', \quad a > 1 \quad (6)$$

где a - постоянный коэффициент, определяющий *относительную* ширину полосы частот, в которой выполняется интегрирование односторонней спектральной плотности, то есть, вычисляется дисперсия отфильтрованного сигнала. Полагая, что на коротком интервале интегрирования по частоте, спектральная плотность случайного сигнала изменяется мало, можем приближенно вместо (6) записать:

$$Q_a(f) = (a-1)f S(f) \quad (7)$$

Величина a выражается через основание относительной шкалы частот γ (обычно это октава, $\gamma=2$, или декада, $\gamma=10$) и дробное число q , означающее какая часть октавы или декады, соответственно, составляет выбранная для спектрального анализа относительная полоса частот: $a=\gamma^q$.

При полосе ровно в одну октаву $a-1=1$, и выражение (7) получается простейшим:

$$Q_{oct}(f) = Q(f) = f S(f) \quad (8)$$

На практике используются полосы: треть октавы ($a-1=0.26$), 1/6 октавы ($a-1=0.12$) и примерно равная ей величина 1/20 декады ($a-1=0.12$). Соответствующие октавные спектры будут выражаться как:

$$\begin{aligned} Q_{oct/3}(f) &= 0.26 f Q(f) \\ Q_{dec/20}(f) &= 0.12 f Q(f) \quad \text{и т.п.} \end{aligned}$$

Как видим, все они различаются только безразмерным масштабным коэффициентом.

Поскольку мы, в действительности, не выполняли интегрирование (6), а дали оценку



ожидаемой величине того или иного октавного спектра исключительно по "мгновенным" значениям исходной СПМ, то в качестве общего определения октавного спектра дисперсии примем самое простое выражение (8). Оно показывает, какова была бы средняя мощность данного случайного сигнала в полосе частот в одну октаву, если бы спектральная плотность этого сигнала была бы постоянна в этой полосе и равна ее фактическому значению на данной абсолютной частоте f . Тем самым мы переводим размерность СПМ в привычную физическую - опутную мощность сигнала - коф . Переход от октавы к другой относительной полосе частот сводится, как показано выше, всего лишь к умножению октавного спектра на соответствующий коэффициент.

Определим также спектр октавного средне-квадратического отклонения (СКО) как

$$q(f) = \sqrt{Q(f)} = \sqrt{S(f)} \quad (9)$$

Спектры гармоник.

С точки зрения наглядности спектрального анализа сложных сигналов, содержащих как случайный шум, так и гармонические компоненты, СПМ и октавные спектры (в вышеприведенном определении (8)) неудовлетворительны. Строго говоря, указанные характеристики адекватны только для чисто случайных сигналов. Если же в исходном сигнале присутствуют стабильные гармонические компоненты, которые обнаруживаются в виде спектральных линий на амплитудных спектрах и периодограммах, то оценивать их амплитуды по периодограммам, СПМ или октавным спектрам без дополнительной информации нельзя.

Спектральное преобразование надо видоизменить. Разумно потребовать, чтобы амплитуды спектральных линий в такой спектральной оценке совпадали бы по размерности и величине с амплитудами или мощностями гармонических составляющих независимо от длины анализируемой реализации T . При этом придется пожертвовать правильным отображением сплошной части спектра. Этому требованию отвечает простое масштабирование обычного амплитудного спектра (2), полученного по одной реализации, коэффициентом, обратным ее длительности T .

$$g(f) = \frac{2}{T} |X_T(f)| = \frac{2A_T(f)}{T} \quad (10)$$

Выражение (10) назовем спектром амплитуд гармоник, или, кратко, спектром гармоник. Оно имеет ту же размерность, что и исходный сигнал. Используя это выражение, можно по амплитудному спектру (2) измерить абсолютные амплитуды и частоты всех стабильных по частоте гармонических компонент в исходном сигнале, даже если они лежат ниже уровня шума. Здесь Фурье-преобразование выступает как оператор оптимального выделения монохроматических колебаний на фоне шума. Сравнивать затем полученные амплитуды гармоник следует с суммарным средне-квадратическим уровнем исходного сигнала, вычисленного во временной области, или же со сплошной частью октавного спектра СКО (9). Для этого достаточно просто поместить на общий график обе спектральные оценки и принимать во внимание в октавном

спектре только сплошную часть, игнорируя непомерно большие спектры гармоник, а в спектре гармоник - только спектральные линии.

В некоторых случаях оценка спектра амплитуд гармоник по периодограммам спектром мощностей гармоник, который определяется как

$$G(f) = \frac{g(f)^2}{2} = \frac{2A_T(f)^2}{T} \quad (11)$$

имеет размерность мощности сигнала и может сравниваться непосредственно со сплошной частью октавного спектра дисперсии (8).

Отметим, однако, принципиальное отличие оценок СПМ и спектра гармоник. Если первая является статистической характеристикой, и для получения ее состоятельной оценки требуется усреднение множества периодограмм по достаточно большой выборке или частотное сглаживание, то вторая представляет собой оценку параметра амплитуды детерминированного сигнала, замаскированного случайным шумом, и здесь требуется выборка лишь минимально необходимая для того, чтобы детерминированная гармоническая компонента проявилась как спектральная линия. Требование минимизации длины анализируемой реализации становится актуальным, если частота гармоники нестабильна. В этом случае спектральная линия размывается (расширяется и падает по амплитуде), и стало быть, спектр гармоник становится недостоверным. Критерием корректности оценки спектра амплитуд гармоник является наблюдаемая ширина спектральной линии, которая, как известно, должна быть обратной длине T исходной реализации сигнала. Но и правильная ширина спектральной линии не гарантирует точности ее измерения. Известно, что при использовании БПФ для анализа сигналов, содержащих гармоники, некратные по периоду интервалу анализа, без существенного увеличения исходного временного массива за счет дополнительных нулей, имеет место "эффект растекания", природа которого сродни "алайсинг-эффекту". В результате, наблюдаемые амплитуды спектральных линий могут оказаться ниже истинных значений, в худшем случае, на 30%. Этому недостатку подвержен и спектр гармоник. Всех перечисленных недостатков лишена следующая, наиболее универсальная спектральная оценка - интегральный спектр, или спектральная функция [1, 2].

Интегральные спектры дисперсии и среднеквадратического отклонения. Интегральный спектр дисперсии определяется как дисперсия сигнала в переменной полосе частот, начиная от некоторой фиксированной f_0 до текущей частоты f . Он вычисляется интегрированием СПМ или периодограммы в переменной полосе частот с фиксированным нижним пределом.

$$D(f_0, f) = \int_{f_0}^f S(f') df' \quad (12)$$

Частота f_0 здесь выступает как параметр, а f - как аргумент интегрального спектра.

Соответственно, можно определить интегральный спектр среднеквадратического отклонения (СКО) как $\sqrt{D(f_0, f)}$, но эта оценка менее удобна.

Для получения интегрального спектра можно использовать вместо спектральной плотности $S(f)$ даже одиночную периодограмму $S_T(f)$, что делает интегральный спектр универсальным инструментом анализа шумоподобных и гармонических сигналов, включая нестабильные по частоте и свип-сигналы. Выбор начальной частоты интегрирования f_0 определяется характером решаемой задачи, но во всех случаях она не должна быть ниже, чем $1/T$, где T - длина реализации, по которой вычисляется периодограмма.

Отметим важнейшие свойства интегральных спектров, которые достаточно очевидны исходя из определения (12) и положительной определенности СПМ.

1. Интегральный спектр является неубывающей функцией частоты.

2. Дисперсия сигнала в любой заданной фиксированной полосе частот $[f_1, f_2]$ определяется просто как разность значений интегрального спектра дисперсии на этих граничных частотах:

$$D(f_1, f_2) = D(f_0, f_2) - D(f_0, f_1) \quad (13)$$

3. Конечное значение интегрального спектра дисперсии равно общей дисперсии сигнала, вычисленной непосредственно во временной области, а интегрального спектра СКО, соответственно, среднеквадратическому отклонению сигнала. Это свойство, в частности, удобно использовать для контроля правильности вычисления интегральных спектров.

4. Крутизна возрастания интегрального спектра пропорциональна СПМ. Мы намеренно употребляем здесь понятие *крутизна* вместо *производная*, поскольку, во-первых, строго говоря, производная не всегда существует, а во-вторых, в случае, когда оценка интегрального спектра определяется по одиночной периодограмме, его производная (т.е., сама периодограмма) является сильно осциллирующей, визуально нечитаемой, функцией, тогда как интегральный спектр выглядит всего лишь как шероховатая, но вполне локализованная кривая, имеющая хорошо различимую глазом крутизну. С точки зрения практического спектрального анализа это достоинство очень существенно, поскольку позволяет наносить на один график несколько однотипных спектров разных сигналов, не сливающихся в неразборчивую картину.

5. Наличие гармонической составляющей в сигнале проявляется в интегральном спектре дисперсии в виде скачка, высота которого равна мощности гармоники. Если гармоника нестабильна по частоте, это приводит лишь к сглаживанию фронта такого скачка, но высота его все равно сохраняется равной мощности гармоники. Важно особо подчеркнуть это достоинство интегрального спектра, которое делает его нечувствительным также и к вышеупомянутому "эффекту растекания". Благодаря этому свойству при формировании массива для БПФ нет необходимости увеличивать его за счет дополнительных нулей, что приходится делать, например, при вычислении спектра гармоник с тем, чтобы избежать "растекания".

6. Оценки интегральных спектров независимы от типа сигналов инвариантны к длине реализации. Это означает, в частности, что если программа БПФ не имеет ограничений по максимальной длине массива, вычисление интегрального спектра целесообразно выполнять

по одной периодограмме без разбиения реализации на псевдоансамбли. Если же такие ограничения существуют, то при создании псевдоансамбля из одной длинной реализации не имеет значения, на сколько отрезков, и какой длины, ее резать.

7. Интегральные спектры дисперсии обладают свойством аддитивности по отношению к любым непрерывным квазистационарным процессам, таким как шумоподобные, гармонические, частотно-модулированные и т.п. Другими словами, смесь стационарного шума и квазигармонических колебаний имеет интегральный спектр дисперсии, равный сумме интегральных спектров составляющих.

Таким образом, интегральный спектр мощности является наиболее универсальной из наглядных спектральных оценок для анализа непрерывных колебаний различной природы. Чтобы привыкнуть правильно интерпретировать его, как говорится, с первого взгляда, полезно промоделировать это преобразование на тест-сигналах разного типа. Так, на рис.1 показан синтетический сигнал и его интегральный спектр мощности. Тест-сигнал (рис. 1а показан его короткий фрагмент) состоит из случайного шума, трех гармонических компонент и свип-сигнала все одинаковой мощности. Частоты гармонических компонент равны 30, 55 и 72 Гц, свип на интервале анализа пробегает полосу частот 50-100 Гц. На рис.2б показаны интегральные спектры мощности каждой из этих компонент и суммарного сигнала. Важно еще раз отметить: спектр суммарного сигнала равен сумме интегральных спектров мощности всех его компонент, что хорошо видно по графику. Высота скачков на спектрах гармоник равна точно их мощностям. Средняя мощность свип-сигнала определяется по перепаду значений интеграль-

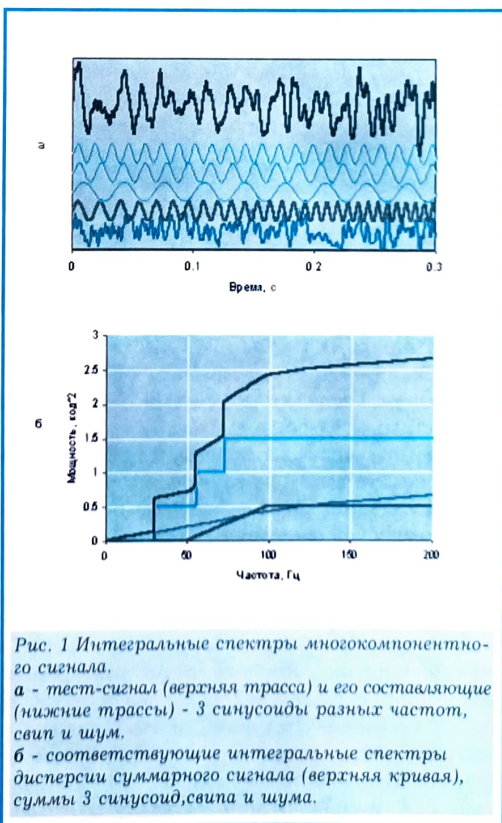
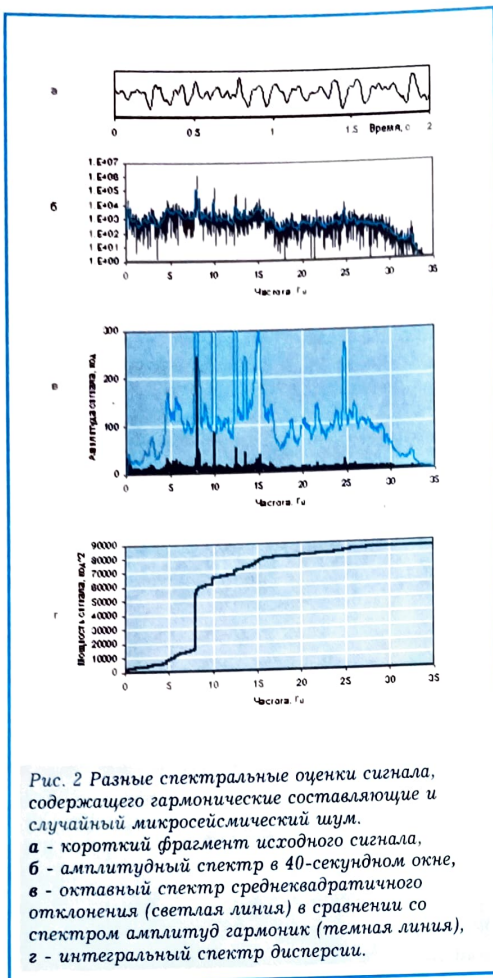


Рис. 1 Интегральные спектры многокомпонентного сигнала.
а - тест-сигнал (верхняя трасса) и его составляющие (нижние трассы) - 3 синусоиды разных частот, свип и шум.
б - соответствующие интегральные спектры дисперсии суммарного сигнала (верхняя кривая), суммы 3 синусоид, свипа и шума.

ИНСТРУМЕНТАРИЙ ГЕОФИЗИКА-ИНТЕРПРЕТАТОРА ТЕОРИЯ



ного спектра этой компоненты на конечной и начальной частоте свип-сигнала. Полоса частот шума шире полосы частот графика, и поэтому его спектральная функция продолжает монотонно возрастать на всем частотном интервале.

На рис.2 проиллюстрированы все рассмотренные выше спектральные оценки на примере анализа реального сейсмического сигнала, содержащего шум и гармоническую составляющую. На рис.2а показан короткий фрагмент записи колебаний, полученной на удалении 50 км от мощного сейсмического вибратора. Вибратор работал на постоянной частоте 8 Гц. Для спектрального анализа был взят отрезок продолжительностью 40 с при частоте дискретизации 100 Гц. На рис.2б показаны неоглаженная и сглаженная по частоте скользящим окном по 10 соседним ординатам периодограмма в логарифмическом масштабе по ординате, поскольку в линейном масштабе первая просто необозрима. На рис.2в на одном графике представлены октавный спектр СКО, полученный по сглаженной периодограмме, и спектр амплитуд гармоник. Здесь уже можно сопоставлять среднеквадратическое отклонение случайной составляющей в октавной полосе частот и амплитуду наблюдаемых спектральных линий в спектре гармоник. Все они имеют размерность первичного сигнала код. На рис.2г показан интегральный спектр мощности этого сигнала в линейном (что важно!) масштабе. Величина крутого большого скачка точно соответствует мощности гармонического сигнала вибратора.

Другие уступы в этой кривой также отображают мощности каких-то сторонних гармонических помех. Максимальное значение точно равно дисперсии исходного сигнала, в чем мы убедились непосредственно по первичному сигналу.

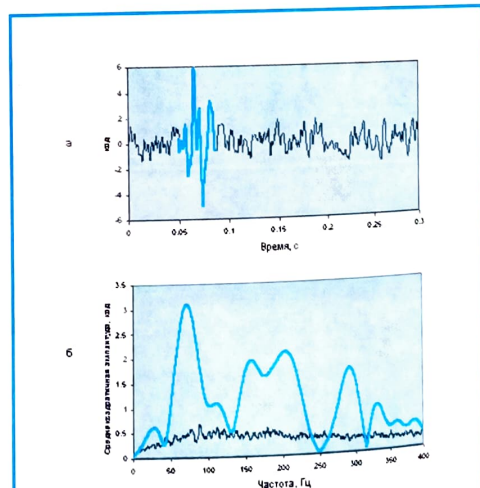
По собственному опыту автор знает, как легко ошибиться в правильном выборе коэффициентов при абсолютных измерениях в спектральной области. Поэтому для тех, кто пользуется библиотечной программой БПФ, в Приложении мы приводим сводку формул для вышеизложенных спектральных оценок.

Некоторые дополнительные замечания по использованию наглядных спектров.

Все рассмотренные оценки можно разделить на два класса - амплитудные, имеющие размерность исходного сигнала, и мощностные, с размерностью квадрата сигнала. Несомненно, более "осязаемы" оценки амплитудные, но они не обладают свойством аддитивности, вследствие чего применять их целесообразно в тех ограниченных случаях, когда исследователь уверен, что исследуемый отрезок сигнала содержит только один тип сигнала, например, только случайный шум, или же в полученной оценке сложного сигнала, содержащего как случайные, так и детерминированные компоненты, на основе визуального анализа ее формы можно отделить "правильную" часть от "неправильной". Пример такого подхода приведен выше, на рис. 2в.

Для анализа сложных многокомпонентных сигналов наиболее подходит интегральный спектр дисперсии, однако квадратный корень из этой функции (интегральный спектр СКО) уже не дает правильных разностных значений, а только текущее или конечное среднеквадратическое. Поэтому скачки, обусловленные гармоническими компонентами одинаковой амплитуды с разными частотами, будут в таком спектре иметь разную величину.

В заключение рассмотрим совместимые оценки импульсного сигнала и непрерывного шума. Это случай, когда необходимо сопоставить в



сейсмограмме спектральный состав какого-то волнового импульса с естественным фоном. Для этого необходимо, прежде всего, получить заранее протяженную запись такого шума без сигнала, достаточную для получения состоятельной оценки его СПМ, например, по записи сейсмограммы шума такой же длины, как и анализируемая, но без воздействия. Сопоставление лучше всего выполнять на октавных спектрах среднеквадратических амплитуд. Необходимые для этого в качестве "сырья" амплитудные спектры (2) сигнала и шума вычисляются каждый на своем интервале T : для вырезанного из сейсмограммы целевого импульса на возможно более коротком, для шума на возможно более длинном. Однако при использовании БПФ (см. Приложение) массив отсчетов анализируемого импульса дополняется нулями до размера

Приложение

Формулы для получения наглядных спектральных оценок через БПФ.

Стандартная программа M -точечного БПФ, принятая в большинстве математических пакетов, выражается следующей парой преобразований. Прямое преобразование:

$$Y_n = \left[\sum_{m=0}^{M-1} y_m e^{-j \frac{2\pi}{M} n m} \right] \quad n = 0, 1, 2, \dots, M-1 \quad (\text{П1})$$

Обратное преобразование

$$y_m = \left[\frac{1}{M} \sum_{n=0}^{M-1} Y_n e^{j \frac{2\pi}{M} m n} \right] \quad m = 0, 1, 2, \dots, M-1 \quad (\text{П2})$$

где y_m и Y_n - временная и частотная последовательности, соответственно, M - целое число из ряда 2 в целочисленной степени.

Обозначим целым числом T фактическую длину исходного сигнала, выраженную числом дискретных отсчетов, причем $T \leq M$. Разность $M-T$ есть число дополнительных нулевых отсчетов, необходимых для укомплектования M -точечного БПФ-массива.

Пусть x_m отрезок реального сигнала протяженностью T отсчетов. Составим последовательность y_m , дополнив ряд x_m нулями до M отсчетов:

$$y_m = \begin{cases} x_m, & m = 0, 1, \dots, T-1 \\ 0, & m = T, T+1, \dots, M-1 \end{cases} \quad (\text{П3})$$

В большинстве практических случаев $T=M$. Последовательность комплексных чисел Y_n , полученная как результат БПФ (П1) временной последовательности (П3), будет исходным материалом для образования всех наглядных спектров. Кроме нее, для получения этих оценок в правильной физической размерности необходимы еще два дополнительных параметра: фактическое число T значащих исходных временных отсчетов, которое может быть меньше или равно M , и частота временной дискретизации f_d .

Все нижеприведенные формулы даны в зависимости от порядкового номера n - дискретного отсчета в выходном массиве БПФ. Абсолютное значение соответствующей частоты находится как

$$f_n = \frac{n f_d}{M} \quad n = 0, 1, 2, \dots, \frac{M}{2} - 1 \quad (\text{П4})$$

массива шума. Затем вычисляются периодограммы (3) или (П5), причем каждая нормируется своим интервалом T независимо от длины БПФ-массива M , после чего периодограмма шума сглаживается по частоте, а периодограмма импульса не сглаживается. Далее находим согласно (8) или (П9) и (9) октавные спектры амплитуд, которые и наносим на общий график в координатах частота - амплитуда. Результат такого сопоставления проиллюстрирован на рис.3.

Литература

1. Дженкинс Г., Ваттс Д. Спектральный анализ и его приложения. Т. 1, Мир, М., 1971, 317 с.
2. Бендат Дж., Пирсол А. Измерение и анализ случайных процессов. Мир, М., 1974, 464 с.
3. Пугачев В.С. Теория случайных функций и ее применение к задачам автоматического управления. Физматгиз, М., изд. 3-е, 1962.

Односторонняя, то есть, заданная только на положительных частотах, и при этом аккумулирующая в себя мощность не только положительных, но и соответствующих отрицательных частот, *периодограмма* находится как:

$$S_T(n) = \frac{2|Y_n|^2}{T f_d} \quad (\text{П5})$$

Ее размерность $\text{код}^2 \cdot \text{с} = \text{код}^2 / \text{Гц}$. Будучи усредненной по множеству из K реализаций, или сглаженной вдоль дискретной переменной n , периодограмма становится *односторонней спектральной плотностью мощности*:

$$S(n) = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K S_{T,k}(n) \quad (\text{П6})$$

Спектр амплитуд гармоник (размерность код) вычисляем как

$$g(n) = \frac{2|Y_n|}{T} \quad (\text{П7})$$

Спектр мощностей гармоник (размерность код^2) находим по любой из следующих формул, в том числе и по периодограмме:

$$G(n) = \frac{g^2(n)}{2} = \frac{2|Y_n|^2}{T^2} = \frac{f_d S_T(n)}{T} \quad (\text{П8})$$

Октавный спектр мощности шума (размерность код^2) лучше всего вычислять через сглаженную по частоте периодограмму или через амплитудный спектр:

$$Q(n) = \frac{S(n) n f_d}{M} = \frac{2n|Y_n|^2}{T M} \quad (\text{П9})$$

Интегральный спектр мощности (спектральная функция по Дженкинсу - Бендату):

$$D(n) = \frac{f_d}{M} \sum_{n=1}^n S(n) = \frac{2}{T M} \sum_{n=1}^n |Y_n|^2 \quad (\text{П10})$$

Его размерность - размерность мощности - код^2 .